DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2011.01.033

一个新的可加函数与 Smarandache 数列

苟　素

(西安邮电学院 理学院,陕西 西安　710061)

摘要: 目的　引入一个新的可加函数 $F(n)$,并研究 $F(n)$ 在某些特殊集合上的均值性质。**方法**　利用初等及解析方法。**结果**　给出了函数 $F(n)$ 在 Smarandache 因子积数列 $P_d(n)$ 及 $q_d(n)$ 上的两个均值公式。**结论**　获得了 $F(P_d(n))$ 及 $F(q_d(n))$ 的两个均值定理。

关　键　词: 可加函数; 均值; Smarandache 数列; 初等方法; 渐近公式

中图分类号: O156.4　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1000-274X(2011)01-0019-03

A new additive function and Smarandache sequences

GOU Su

(School of Science, Xi´an University of Posts and Telecommunications, Xi´an 710061, China)

Abstract: **Aim**　To intruduce a new additive function $F(n)$, and study the mean value properties of $F(n)$ in some special sequences. **Methods**　Using the elementary and analytic methods. **Results**　Two mean value formulae of $F(n)$ in Smarandache divisor product sequences $\{P_d(n)\}$ and $\{q_d(n)\}$ are obtained. **Conclusion**　Two mean value formulae for $F(P_d(n))$ and $F(q_d(n))$ are achieved.

Key words: additive function; mean value; Smarandache sequences; elementary methods; asymptotic formula

对任意正整数 n,称算术函数 $f(n)$ 是可加的,如果对任意正整数 m,n 且 $(m,n) = 1$ 有 $f(mn) = f(m) + f(n)$。称 $f(n)$ 是完全可加的,如果对任意正整数 r,s,都有 $f(rs) = f(r) + f(s)$。现在定义一个新的算数函数 $F(n)$ 如下:$F(0) = 0$,当 $n > 1$ 且 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,定义 $F(n) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_k p_k$。事实上当 $m = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 及 $n = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$ 时,有 $mn = p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$,从而由 $F(n)$ 的定义有 $F(mn) = (\alpha_1+\beta_1)p_1 + (\alpha_2+\beta_2)p_2 + \cdots + (\alpha_k+\beta_k)p_k = F(m) + F(n)$,所以 $F(n)$ 是一个完全可加函数。在初等数论中,满足可加性质的算术函数很式,例如当 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,函数 $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ 及对数函数 $f(n) = \ln n$ 都是完全可加函数。此外,正整数 n 的所有不同素因素的个数 $\omega(n) = k$ 是一个可加函数,但不是完全可加函数。关于可加函数性质的研究,在初等数论以及素数分布问题中占有十分重要的位置,许多著名的数论难题都与之密切相关,因而其研究工作是很有意义的。有关函数 $\Omega(n)$ 及 $\omega(n)$ 的性质,可参阅文献[1-4]。

本文的主要目的是研究完全可加函数 $F(n)$ 在某些特殊数列上的均值分布问题,并利用初等方法给出两个较强的渐近公式。为此,先介绍一类 Smarandache 数列 $\{P_d(n)\}$ 及 $\{q_d(n)\}$。在文献[5]及[6]中,美籍罗马尼亚数论专家 F. Smarandache 教授引入了许多数论函数及数列,并提出了不少未解决的问题,而 $\{P_d(n)\}$ 及 $\{q_d(n)\}$ 就是其中的两个有趣的数列,$P_d(n)$ 表示 n 的所有正因数的乘积,$q_d(n)$ 表示 n 的所有小于 n 的正数因子的乘积。即

$$P_d(n) = \prod_{d \mid n} d = n^{\frac{d(n)}{2}};$$

$$q_d(n) = \prod_{d \mid n, d < n} d = n^{\frac{d(n)}{2}-1}。$$

收稿日期: 2010-03-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅科研专项基金资助项目(08JK433);西北大学研究生自主创新基金资助项目(08YZZ30)

作者简介: 苟素,女,陕西凤翔人,西安邮电学院教授,从事基础数学研究。

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中 $d(n)$ 为Dirichlet除数函数,即 n 的所有正因数的个数。

在文献[5]中,F. Smarandache教授建议我们研究数列 $\{P_d(n)\}$ 及 $\{q_d(n)\}$ 的性质。关于这一问题,许多学者进行过研究,获得了一系列有趣的结论,参阅文献[7]及[8]。本文利用初等及解析方法研究了函数 $F(n)$ 在数列 $\{P_d(n)\}$ 及 $\{q_d(n)\}$ 上的均值问题,并给出了两个较强的均值公式。具体地说即证明了下面的定理。

定理1 设 N 为给定的正整数,则对任意给定的实数 $x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} F(P_d(n)) = \sum_{i=1}^{N} d_i \cdot \frac{x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1} x}\right)。$$

其中 $u_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为可计算的常数且 $u_1=\frac{\pi^4}{72}$。

定理2 设 N 为给定的正整数,则对任意给定的实数 $x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} F(q_d(n)) = \sum_{i=1}^{N} h_i \cdot \frac{x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1} x}\right),$$

其中 $h_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为可计算的常数且 $h_1=\frac{\pi^4}{72}-\frac{\pi^2}{12}$。

1 两个引理

为了完成定理的证明,需要如下的简单引理。

引理1 对任意实数 $x>1$,设 $\pi(x)$ 表示所有不大于 x 的素数的个数,则对任意正整数 k,有渐近公式

$$\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1 = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \frac{x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)。$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $c_1=1$。

证 明 参阅文献[9]中第3章定理2。

引理2 设 N 为给定的正整数,则对任意给定的实数 $x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} F(n) = \sum_{i=1}^{N} d_i \cdot \frac{x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1} x}\right)。$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为可计算的常数且 $d_1=\frac{\pi^2}{12}$。

证 明 对任意正整数 n,设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子。现在定义如下两个集合:

$$A=\{n: n\leqslant x, P(n)>\sqrt{n}\};$$

$$B=\{n: n\leqslant x, P(n)\leqslant\sqrt{n}\};$$

当 $n\in A$ 时,由 $F(n)$ 的定义容易推出 $F(n)\ll\sqrt{n}\ln n$。于是根据Abel恒等式[10]可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} F(n) \ll \sum_{n\leqslant x}\sqrt{n}\ln n \ll x^{\frac{3}{2}}\ln x, \tag{1}$$

而对于集合 B,注意到 $F(n)$ 的可加性质,由引理1及Abel恒等有

$$\sum_{p\leqslant\frac{x}{k}} p = \pi\left(\frac{x}{k}\right)\cdot\frac{x}{k} - \int_1^{\frac{x}{k}}\pi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{N} r_i \cdot \frac{x^2}{k^2\ln^i \frac{x}{k}} + O\left(\frac{x^2}{k^2\ln^{N+1}\frac{x}{k}}\right)。$$

其中 $r_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为可计算的常数且 $r_1=\frac{1}{2}$。

于是利用上式不难推出

$$\sum_{n\in B} F(n) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n, p>\sqrt{n}}} F(n) = \sum_{\substack{pk\leqslant x\\ p>k}} F(pk) =$$

$$\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\sum_{k<p\leqslant\frac{x}{k}}(F(k)+p) =$$

$$\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\sum_{k<p\leqslant\frac{x}{k}} p + O\left(\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\sum_{k<p\leqslant\frac{x}{k}} k\right) =$$

$$\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\sum_{k<p\leqslant\frac{x}{k}} p + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}\right) =$$

$$\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\left[\sum_{i=1}^{N} r_i\cdot\frac{x^2}{k^2\ln^i\frac{x}{k}} + O\left(\frac{x^2}{k^2\ln^{N+1}\frac{x}{k}}\right)\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1}x}\right)。\tag{2}$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为可计算的常数且 $d_1=\frac{1}{2}\zeta(2)=\frac{\pi^2}{12}$。

结合式(1)及式(2)立刻得到渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} F(n) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} F(n)) + \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}} F(n) = \sum_{i=1}^{N} d_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{N+1}x}\right)。$$

于是,证明了引理2。

2 定理的证明

利用初等方法以及分拆理论给出定理的证明。首先,证明定理1。由数列 $P_d(n)$ 的定义并注意分拆恒等(参阅文献[10]中定理3.17)有

$$\sum_{n\leqslant x} F(P_d(n)) =$$

$$\sum_{n\leqslant x} F\left(n^{\frac{d(n)}{2}}\right) = \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{2}d(n)F(n) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{nm\leqslant x} F(mn) =$$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{1}{2}\sum_{nm\leqslant x}(F(m)+F(n))=\sum_{mn\leqslant x}F(n)=$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n\leqslant\frac{x}{m}}F(n)+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m\leqslant\frac{x}{n}}F(n)-$$

$$(\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}F(m))\cdot(\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}1)。\tag{3}$$

由引理 2,有

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n\leqslant\frac{x}{m}}F(n)=$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\left[\sum_{i=1}^{N}d_i\cdot\frac{x^2}{m^2\ln^i\frac{x}{m}}+O(\frac{x^2}{m^2\ln^{N+1}x})\right]=$$

$$\sum_{i=1}^{N}u_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x}+O(\frac{x^2}{\ln^{N+1}x}),\tag{4}$$

其中 $u_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为可计算的常数且 $u_1=d_1\cdot\zeta(2)=\frac{\pi^4}{72}$。

应用 Abel 恒等式及引理 2,有估计式

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m\leqslant\frac{x}{n}}F(n)=x\cdot\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{F(n)}{n}+$$

$$O(\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}F(n))=O(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x})。\tag{5}$$

同样,显然也有估计式

$$(\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}F(n))\cdot(\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}1)\ll\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}。\tag{6}$$

结合式(3) ~ (6) 立刻推出渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}F(P_d(n))=\sum_{i=1}^{N}u_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x}+O(\frac{x^2}{\ln^{N+1}x})。$$

其中 $u_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为可计算的常数且 $u_1=\frac{\pi^4}{72}$。于是,证明了定理 1。

注意到定理 1 并应用同样的方法也可以得到

$$\sum_{n\leqslant x}F(q_d(n))=\sum_{n\leqslant x}(\frac{d(n)}{2}-1)F(n)=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}d(n)F(n)-\sum_{n\leqslant x}F(n)=$$

$$\sum_{i=1}^{N}u_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x}-\sum_{i=1}^{N}d_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x}+O(\frac{x^2}{\ln^{N+1}x})=$$

$$\sum_{i=1}^{N}h_i\cdot\frac{x^2}{\ln^i x}+O(\frac{x^2}{\ln^{N+1}x})。$$

其中 $h_i=u_i-d_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为可计算的常数且 $h_1=\frac{\pi^4}{72}-\frac{\pi^2}{12}$。

定理 2 得证。

参考文献:

[1] ZHONG C H. A sum related to a class arithmetical functions[J]. Utilitas Math,1993,44: 231-242.

[2] SHAPIRO H N. Introduction to the Theory of Numbers[M]. New York: John Wiley and Sons,1983.

[3] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质[J]. 数学学报,2006,49(5): 1009-1012.

[4] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社,2007.

[5] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House,1993.

[6] PEREZ M L. Florent Smarandache Definitions, Solved and Unsolved Problems, Conjectures and Theorems in Number theory and Geometry[M]. Chicago: Xiquan Publishing House,2000.

[7] LIU Hong-yan, ZHANG Wen-peng. On the simple numbers and its mean value properties[J]. Smarandache Notions Journal,2004,14: 171-175.

[8] ZHU Wei-yi. On the divisor product sequences[J]. Smarandache Notions Journal,2004,4: 144-146.

[9] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科技出版社,1988.

[10] TOM M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag,1976.

(编　辑　亢小玉)

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net